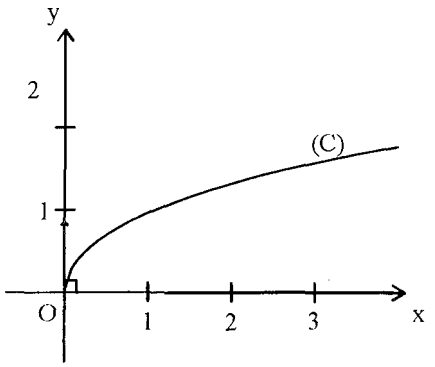

2/a- $y \in IR_+^*$. $e^x + e^{-x} - 2 = y \Leftrightarrow e^x e^x + e^{-x}e^x - 2e^x = ye^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (2+y)e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - (2+y)X + 1 = 0$ avec $X = e^x$

$(\Delta = (2+y)^2 - 4 = y^2 + 4y > 0)$

$\Leftrightarrow X = e^x = \dfrac{2+y-\sqrt{y^2+4y}}{2}$ ou $X = e^x = \dfrac{2+y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \text{Log}\left(1+\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$ ou $x = \text{Log}\left(1+\dfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$

$\cdot y \in IR_+^* \Rightarrow 1+\dfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2} > 1 \Leftrightarrow \text{Log}\left(1+\dfrac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right) > 0$

$\cdot y \in IR_+^*$. $\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2} = \dfrac{y^2-y^2-4y}{2\left(y+\sqrt{y^2+4y}\right)} < 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2} < 1$

D'où la quantité $x = \text{Log}\left(1+\dfrac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$ n'est pas pas dans IR^+.

Conclusion : l'équation possède une seule solution dans IR^+ qui est

$x = \text{Log}(1+\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}) = f(y)$.

b- f est continue et strictement croissante sur IR^+ donc f réalise une bijection de IR^+ sur $f(IR^+)=IR^+$

d'où f possède une fonction réciproque $g: IR^+ \mapsto IR^+$.

Soit la fonction $\Psi : IR^+ \mapsto IR^+; x \mapsto e^x + e^{-x} - 2$.

$\cdot \Psi(0) = e^0 + e^{-0} - 2 = 0$ aussi $g(0) = 0$ car $f(0) = 0$.

$\cdot \forall y > 0;\ \Psi[f(y)] = e^{f(y)} + e^{-f(y)} - 2 = y$ d'après **2/a-**

Aussi $\forall y \geqslant 0; g(f(y)) = y$ car g est la réciproque de f.

D'où $g = \Psi$.